الدالة، الدالة الوصفية، الدالة القضوية، دالة الصدق

أ/ محمد قصري
طالب دكتوراه
جامعة الجزائر(2)

تاريخ الإرسال:17-07-2018 تاريخ القبول:27-10-2018
تاريخ النشر:12-12-2018

ملخص:
الوصول إلى البنية المنطقية الدقيقة للقضايا ولمختلف صور الاستدلال كان يقتضي ضبط اللغة الطبيعية التي تعرض فيها تلك الأحكام أو الاستدلالات. أو إذا أمكن- وهو ما حدث بالفعل التخلص كلية من اللغة الطبيعية واستبدالها بلغة رمزية كالتي تستخدمها الرياضيات (وقد كانت حتى الرياضيات في ثقافتنا العربية تستخدم اللغة الطبيعية)، يمكن العودة لأعمال الخوارزمي مثلا-ثم تحولت مع المحدثين إلى اللغة الرمزية-التخلص من اللغة الطبيعية كان ضروريا لما تحتويه من ألفاظ مشتركة، تراكيب مشتركة وألفاظ متواطئة... وغيرها من عيوب اللغة التي يلتبس معها المعنى وهذا ما يظهره جانب من هذا العمل - أي إمكانية تحول المنطق من اللغة الطبيعية إلى اللغة الرمزية طلبا للدقة والوضوح.
الكلمات المفتاحية: الدالة ; الدالة احادية المقابل ; الدالة ثنائية المقابل ; الحجة ; التابع ; المتحول.

Abstract :
The resume of discourse To attain the strict logical structure of propositions and the divers forms of reasoning, it was necessary to adjust the natural language or- if it possible-(and that is what had been) to let down completely the natural language and its sementic terms and denotations thence is discourse would become ambiguous . and remplacing it by symbolic language like the language of mathematics - we must mentioned here that mathematics in the ancient arabic culture used to be phrased in the natural language - (works of alkawarizmi as exemple). The difficults of the natural language advenced modernistic mathematicians to adopt symbolics .can the same revolution succeed in the logic ?.that what the discourse try to demonstrate.

عرض:
يجب أن نسجل أولا أن مصطلح الدالة لم يعد يخص الرياضيات فقط كما يتهيأ لمن ليس له إطلاع على أبحاث المنطق المعاصر بل أن هذا المصطلح صار مصطلحا مألوفا منذ بداية القرن العشرين، وقد كان الرياضي والمنطقي الألماني غوتلوب فريجه (1842–1925)
أول من أدخل هذا المصطلح في لغة المنطق الذي جعل من المنطق منطقا مصورنا Formaliséيبني أنساقا منطقية بقواعد بناء وطرق برهنة مماثلة لطرق البرهنة الرياضية

ولا تقل إحكاما عنها بل ربما تتفوق عليها من جهة الصورية . وبذالك يعد فريجه عند المتخصصين هو الأب الحقيقي للمنطق المعاصر وليس ليبنتز الذي لم يعمل في شق من عمله إلا على محاولة إصلاح المنطق التقليدي باستخدام الرموز الرياضية بدل حدود اللغة الطبيعية. وقد استفاد الرياضي والمنطقي الانجليزي برتراند رسل (1872–1970) من إبداعات فريجه في موضوع الدالة في مجال المنطق. ونذكر برتراند رسل لأن هذا الاسم قد غطى في مرحلة ما من التاريخ على إبداعات فريجه .

وبالعودة لموضوع هذا المقال فلكلمة دالة، ودالة وصفية، ودالة قضوية، ودالة الصدق. مفاهيم مختلفة لكنها تتداخل لما بينها من عناصر مشتركة الأمر الذي قد يثير بعض الغموض، ومن هنا وجدت الحاجة إلى التمييز بينهامن خلال عمل بعض المناطقة المتخصصين، فالدالةFonction بشكل عام هي علاقة يتوافق فيها مجموعة من الحدود وبشكل محدد.

عندما تكون الدالة بحدين (ونسميها دالة أحادية Monadic أو Univoque) مثلا:

تا(سـ) = صـ . فهنا من أجل كل سـ لا يوجد إلا صـ واحد يحقق مع سـ العلاقة

(سـ ع صـ). أو بعبارة أخرى إذا كان:[(سـ ع صـ) وكان (سـ ع كـ)] ← (صـ = كـ).

ويمكن كتابة الصيغة (سـ ع صـ)بالصورة سـ = تا (صـ) بحيث تمثل قيم سـ قيم الدالة وتمثل قيم صـ قيم الحجة.

[الحجة (Valeur) في مجال الرياضيات هي القيمة العددية التي تتحقق بها الدالة أي التي تتعين بها القيمة العددية للدالة مثلا في الشكل: تا(سـ) = 5س^2+ 1. إذا أخذنا العدد 3 كحجة (أي كقيمة للمتغير س) تكون قيمة الدالة هي 46 أي 5× 3^2 + 1. وفي مجال المنطق (وليلاحظ القارئ أننا نستخدم كلمة الدالة بمفهوم يقترب من مفهومها في الرياضيات). أقول في مجال المنطق يمكن التمثيل للتحديد السابق للعلاقة الدالة بعلاقة

(أب) سـ أب صـ، فمن أجل أيّ صـ "ابن" لا يوجد إلا سـ واحد هو أب لـ صـ .هذا في الدالة الأحادية . لكن علاقة "صديق" أو علاقة "قاسم" في الرياضيات ليست دالة أحادية لأنه قد يكون لشخص ما عديد من الأصدقاء وقد يكون لعدد ما عديد من القواسم .فالدالة الأحادية أو أحادية المقابل هي التي تكون فيها قيمة الدالة واحدة دائما بينما الحجة قد تكون لها أكثر من قيمة. في الجبر مثلا الدالة "ع = س^2" في مجموعة الأعداد الصحيحة س قد يأخذ قيمة سالبة أو موجبة لكن لا توافقها إلا قيمة موجبة لـ ع دائما، إذا أخذنا س= - 2 أو س = 2 .فإن ع = 4 دائما. ويمكن التعبير عن المساواة السابقة بشكل دالي بالصورة " ع= تا (س^2) " و بأخذ القيمة "2 " لـس، تكون صورة الدالة "4 = (2)^2 "

أو"4 = (- 2)^2 " و "تا " توافق تربيع القيمة 2. وللمقارنة من أجل توضيح معنى الدالة فإن علاقة - أصغر تماما – ليست علاقة دالة لأنه من أجل أي عدد " ص" يوجد ما لا نهاية له من الأعداد " س" بحيث " س > ص ".

وهذا يوضح الفرق الجوهري بين مفهوم الدالة و المفهوم العام للعلاقة .(1)

فالدالة هي علاقة لكنها علاقة وبخصوصية معينة . وهي أنه لا يوجد عنصرين هما معا دالة لذات العنصر. فلا يوجد مثلا عددين هما معا " حاصل الضرب في أربعة " لنفس العدد Quadruples(2) فحاصل الضرب في أربعة للعدد ثلاثة (3 × 4) هو فقط اثنتا عشر وليس

غيره ولا يوجد إلا عدد واحد هو مربع لعدد معين. فلا يوجد مثلا إلا العدد أربعة هو مربع للعدد اثنين.
ولا يوجد إلا عدد هو ضعف لعدد ما، فلا يوجد مثلا إلا الثمانية هي ضعف للعدد أربعة.
وفي الشريعة الإسلامية علاقة "زوج" هي علاقة دالة أو باختصار هي دالة أحادية ففي زمن معين لا يوجد إلا شخص واحد هو زوج لامرأة ما .""""
وقد تأخذ الدالة صورة أخرى هي الدالة الثنائية المقابل Biunivoque. بحيث يكون لقيمة الدالة قيمة واحدة مقابلة لقيمة الحجة والعكس صحيح، أي ولقيمة الحجة قيمة واحدة مقابلة لقيمة الدالة . مثلا " س = - ع "
ليكن لدينا : تا (سـ ، عـ) علاقة ثنائية ، مجال تعريفها هو مجموعة الأزواج المرتبة (سـ ا ، عـ ب) . عندما يكون في هذا الميدان من أجل كل سـ ا لا يوجد إلا شيء واحد عـ ب على الأكثر يرتبط به.
تسمى عندها هذه العلاقة بأنها علاقة أحادية بالنسبة لـ عـ . مثلا (سـ ابن عـ). وكذلك عندما يكون في هذا الميدان من أجل أي عـ ب ، لا يوجد إلا شيء واحد سـ ا على الأكثر بحيث تا(سـ ا، عـ ب) تكون صحيحة. تسمىالعلاقة عندها بأنها أحادية بالنسبة لـ س. مثلا (سـ أب عـ).
وعندما يتحقق الشرطين السابقين معا وفي وقت واحد في علاقة ما تسمى Biunivoqueعندها العلاقة بأنها علاقة ثنائية المقابل مثلا (سـ هو الابن الوحيد لـ عـ)[3].
وبلغة الأصناف تكون الدالة أو العلاقة ثنائية المقابل، عندما يكون لكل قيمة من قيم صنف (قيم الدالة) ، قيمة واحدة فقط مقابلة من صنف(قيم الحجة) . والعكس صحيح [4].
فمجموعة الأعداد الموجبة و مجموعة الأعداد السالبة ، لكل عدد موجب مثلا عدد سالب مقابل واحد فقط والعكس صحيح .
- (- 2) = 2 ، - (- 3) = 3 . والعكس صحيح 2 = - (- 2)
3 = - (- 3) ، 4 = - (- 4) .... الخ .
أو الدالة ع = 2س. يطرح هذا الشكل من الدالة علاقة ضعف مقابل علاقة نصف، بحيث لكل قيمة من طرف قيمة واحدة فقط مقابلة من الطرف المقابل و العكس صحيح فهي تضع علاقة توافق واحد لواحد [5].

وقد تكون للدالة أكثر من حجة وأكثر من حجتين، كما في المساواة التالية. ع = تا (س، ص). ومن أمثلة العلاقة الرباعية أو العلاقة بين أربعة حدود العلاقة التالية:
إذا كانت النقاط الأربعة . ا، ب، جـ، د. بحيث المسافة بين ا و ب تساوي المسافة بين جـ و د أو بعبارة أخرى إذا كانت القطعة المستقيمة ا ب و القطعة المستقيمة جـ د متساويتان كانت العلاقة محققة .تسمى هذه العلاقة بدالة بأربعة حدود.
وتسمى العلاقة "ع " بدالة بثلاثة حدود. إذا كان من أجل شيئين أيّ كانا "س، ص" يتوافق معهما شيء واحد على الأكثر "ق" بحيث تكون له هذه العلاقة مع "س و ص". ويمكن صياغة هذه العلاقة الدالة بإحدى الصيغتين الرمزيتين التاليتين: ق= ع (س، ص) أو ق = س ع ص. ومن أجل وضع التمييز بين العلاقة الدالة بحدين و العلاقة الدالة بثلاثة حدود .

نقول في الحالة الأولى دالة بحجة واحدة ونقول في الحالة الثانية دالة بحجتين. وبشكل مماثل العلاقة بأربعة حدود نسميها دالة بثلاثة حجج ..... وهكذا (6)

ولكن قد تكون الدالة ثابتة وهي صورة أخرى للدالة، كما في العبارة تا(س)=3. فقيمة الدالة دائما ثابتة وهي في مثالنا العدد 3 مهما تغيرت قيمة الحجة.ويكون تمثيلها البياني خط مستقيم يوازي محور السينات ويمر من النقطة 3.

الدالة بحجتين يمكن أن تكون حجتاها من نفس الدرجة أو المستوى أو أن تكونامن مستويين مختلفين. من نفس المستوى عندما تكون الحجتان معا مثلا متغيرين جبريين .

"ع = 3ص + 4س".

و من مستويين مختلفين عندما تكون إحدى الحجتين مثلا متغير جبري و الحجة الثانية دالة . مثلا " تا(س)= تا(ص) + 3ك .

في مجال اللغة تكون الدالة من درجة أولى إذا كانت حجتها "مفردة لغوية" من لغة الموضوع وتكون من درجة ثانية إذا كانت حجتها "مفردة لغوية " من لغة ما حول الموضوع مثلا: [(سـ منطقي)دالة قضية].

أما الدالة القضوية Fonction Propositionnel :

فهي الصيغة التي تحتوي على متغيّر أو أكثر بحيث لا تتحدد قيمة صدقها إلا بتحديد قيمة متغيّرها أو متغيّراتها لتتحول بعدها إلى قضية رياضية أو قضية منطقية صادقة أو كاذبة.

(ويحب أن نضيف بأنه ليست كل صيغة لغوية هي قضية). فنحن نتكلم عن القضية الخبرية كما حددها أرسطو. وكل معادلة رياضية هي دالة قضوية صادقة بالقيم التي تحققها وكاذبة بغيرها.

العبارة سـ عدد طبيعي. هي دالة قضية صادقة بوضع العدد 2 مثلا مكان سـ، وهي قضية كاذبة بوضع العدد (-2) مثلا مكان سـ

وفي الهندسة. معادلة منحنا بيانيا في مستوٍ أو معادلة مساحة في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد هي دالة قضية. صحيحة بالقيم التي تنتمي لنقاط المنحني أو المساحة وخاطئة بغيرها.

لكن المهم في موضوع دالة القضية، أن العبارات اللغوية التي تحتوي على حدود كلية ستكون دوال قضايا وليست قضايا كما يبدو للوهلة الأولى، وهذا هو الجديد مع موضوع دالة القضية الذي أتى به فريجه.

فالقول "الأستاذ رجل مثقف" هو دالة قضية وليس قضية إذ الموجود الحقيقي والذي يمكن التحقق من مستواه لمعرفة صدق الحكم السابق أو كذبه هو أستاذ معين، دون ذلك لا يمكن إصدار أي حكم . فالكلام السابق هو دالة مركبة من دالتين، ويمكن ترجمته إلى الشكل التالي: ((إذا كان سـ أستاذ فـ سـ مثقف)). وهذا الفهم الجديد والصحيح للصيغ اللغوية قد حمل فريجه على مراجعة كل عمل أرسطو.

والجدير بالملاحظة أن كل صور قضايا القياس الأرسطي هي دوال مركبة .

أما الدالة الوصفيةDiscréptiveFonction:

فهي الصيغة الرمزية التي عندما نضع فيها الثابت مكان المتغيّر "وهذا الثابت قد يكون اسم شيء في الصيغ اللغوية أو قيمة عددية في الصيغ الرياضية "تصبح عندها تلك الصيغة إما

ذات معنى أو لا معنى لها . أي ليست دالة وصفية .[7] ولا يتعلق الأمر في الدالة الوصفية بالصدق ولا بالكذب كالحال في الدالة القضوية ، وهذا أهم ما يميّز الدالة الوصفية.
مثلا الصيغة " 2س + 1 ". فعند وضع العدد 4 مكان المتغيّر س تكون قيمة الصيغة 9 .
وعند وضع العدد 5 مكان المتغيّر س تكون قيمة الصيغة 11. والعبارة السابقة على خلاف العبارة " 2س+ 1 = 9" التي لا تكون صحيحة إلا بالقيمة 4 .
لكن عند وضع رسم لشكل هندسي ما أو اسم علم مكان س تكون الصيغة لا معنى لها.
وكل العبارات الجبرية التي ليس فيها مقابلة طرف لطرف من خلال علامة المساواة مثلا أو علامة المتراجحة هي دوال وصفية. وهي وصفية لأنها تصف حدا بواسطة علاقته بحجته كالقول جيب $\frac{\Pi}{2}$ الذي هو وصف للعدد 1.
أو القول " خال علي " فهي عبارة تشير لشخص بواسطة علاقته بشخص آخر.
أما دالة الصدق Fonction De Vérité:
فهي الصيغة الرمزية المكونة تكوينا جيداوهذا الوصف يرمز له في اللغة الانجليزية بالرمز WFF الذي هو اختصار للعبارةWellFormed Formula.
ويعني التكوين الجيّد أن تتكون الصيغة من متغيّرات ترمزإلى قضايا ـ إذا كنا نتكلم في منطق القضايا ـ ومن روابط منطقية Opérateursتربط بين القضايا على أن يوضع الرابط المنطقي بين قضية وقضية أو بين مركب صدقي وقضية أو بين مركب صدقي ومركب صدقي آخ . ومثال الحالة الأولى (ق ∧ ك)، ومثال الحالة الثانية. [ق ← (ك ∧ ل)]، ومثال الحالة الثالثة [(ق∨ ل) ← (ك ∧ ل)].
لكن المتغيّر القضوي "ك" مثلا بمفرده ليس دالة صدق والصيغة (∧ ق ك) ليست دالة صدق. ودالة الصدق تأخذ قيمتها من قيمة المتغيّرات القضوية التي تتركب منها ومن نوع الروابط المنطقية التي تربط بين تلك المتغيّرات القضوية ومن مدى كل رابط كما هو محدد في تلك الصيغة.
أما المفهوم العام للدالة فقد كان لفريجه الفضل الكبير في ضبطه من خلال تحليل مسهب أتى فيه أولا على تصحيح هذا المفهوم عند الرياضيين الذين كان البعض منهم يستخدمه بطريقة خاطئة.
فعندما يقول الرياضيون – دالة س – فهم يعنون صيغة رياضية يظهر فيها هذا المتغير مثلا العبارة " 2س^3+ س"، والصيغة "(2×2^3)+2 " يسمونها دالة العدد 2. فهم في هذا لا يميزون الشكل من المحتوى .
(2×2^3)+2 ، والعدد 18 ، والجداء 3×6
تختلف في الشكل وإن كانت تتفق في المحتوى. والاستخدام الشائع لكلمة دالة في الرياضيات يطابق حرفيا ما تعنيه العبارة ((مجال قيم الدالة)) حسب فريجه.
ومجموع الحدين (5+2)، و(4+3) هما متساويان لكنهما ليسا متطابقين. فإذا كان الرياضيون يرون في العبارة "2س^3+س" دالة لـ س، والعبارة (2×1^3) +1دالة العدد 1
و العبارة (2×4^3) +4 دالة العدد 4 ويرون في العبارة (2×5^3)+5 دالة العدد 5 فالصحيح أنها دالة واحدة ولكن بحجج مختلفة هي . س، 1، 5،4 .
فالدالة هي العنصر المشترك بين هذه الصيغ عند حذف تلك الحجج

" 2× ( ) + ( ) " وأكثر من هذا وهو ما يقترحه فريجه أن الدالة والحجة تؤلفان كلا موحدا [8].

ومن جهة أخرى فالعبارة العددية لا تسمى دالة إلا استعارة لأنها في الحقيقة تشير إلى قيم محددة. وبالعودة إلى المفهوم الذي يحدده فريجه للدالة، وهو في شكل بناء العبارة الرياضية.

نجد في العبارتين:{ (2×1^3) +1 } ، {(2×2^3) +2 }

نفس الدالة، ولكن لا نجد ذلك في العبارتين {(2×1^3) + 1 }، و{ (1-4) } وإن كانتا تشيران إلى نفس القيمة.

يستعير "فريجه" المقاربة الهندسية التالية لبيان العلاقة الأساسية بين الدالة والحجة

فيقول : حال الدالة والحجة كحال القطعة المستقيمة التي نقسمها نصفين إذ توجد نقطة ونقطة واحدة تقسم القطعة المستقيمة إلى نصفين لكن إذا شئنا الدقة وأردنا إحصاء كل نقاط كل نصف القطعة (لأن المستقيم هو مجموعة من النقاط) وبحيث لا نترك أي نقطة ولا نحسب نقطة ما مرتين. فالنقطة التي تقسم القطعة المستقيمة يجب أن نضيفها إلى إحدى القطعتين وإحدى القطعتين المستقيمتين فقط للحصول على قطعة مستقيمة بالمعنى التام للقطعة المستقيمة.

((رياضيا تتحدد القطعة المستقيمة بنقطتين، نقطة البداية ونقطة النهاية))

بينما يبقى ينقص القطعة المستقيمة الأخرى شيء ما إذ أن "نقطة المنتصف" التي يفترض أن تحدد نهاية هذه القطعة المستقيمة لم تعد تنتمي إليها بل تنتمي للقطعة الأولى إذ هي نهاية هذه الأخيرة فلم يعد إذن بالإمكان تسميتها قطعة مستقيمة كذالك حال الدالة بدون حجة. فما نحصل عليه بإشباع الدالة بالحجة هو قيمة الدالة [9].

في العبارة { ع = 3 س + 1 } لا نستطيع تعيين قيمة "ع" إلا بتعيين قيمة"س"

لكن يجب أن نلاحظ أن الدالة بطرفين كالشكل ع =2س + 5 .

صحيح عندما تتعينقيمة الحجة تتعين قيمة الدالة ، لكن صحيح أيضا أنه عندما تتعين قيمة (ع) تتعين أيضا قيمة (س). فكما تدل قيمة (س) على قيمة (ع) تدل قيمة (ع) على قيمة (س) هذه الزاوية من الرؤية لم يذكرها فريجه ولا يبدو أن لها صورة مقابلة في المنطق ففي الدالة (سـ طبيب) ليس فيها طرف مقابل لطرف ثاني لنقارنها بالتحليل السابق.

مما يعني أن سحب المفهوم الرياضي للدالة على المجال المنطقي يقتضي بعض التحديد.

في الدالة (2س^3+ س) المتغير "س" يحدد لنا المكان الذي نضع فيه الحجة للحصول على قيمة الدالة، فقيمة الدالة السابقة هي مثلا((3بالنسبة للحجة1)) وهي ((18 بالنسبة للحجة 2)). والهندسة التحليلية توفر لنا تمثيلا حسيا لهذه المعاني ، في العبارة "ع = س^2 – 4 س".

على محور الفواصل تتعين قيم الحجة س وعلى محور التراتيب تتعين قيم الدالة المقابلة لقيم الحجة .

والمنحنى البياني الناتج هو التمثيل الحسي للدالة السابقة المشار لها .

وهو مطابق لمنحنى الدالة {ع = س (س- 4) }.

ويظهر من خلال التمثيل الهندسي أن الدالة عبارة عن قانون تناسب بين مجموعة من الحجج ومجموعة من القيم التي تقابلها .

والكتابة : س^2- 4 س = س (س- 4) لا تساوي بين الدالتين بل بين قيمهما فالدالة إذا هي دائما في شكل العبارة[10] .

وللتعبير عن الدالة نستخدم الحروف تماما كما نستخدم الحروف للتعبير عن القيم الغير محددة "س" مثلا .

في الفرنسية .Fفنستخدم للتعبير عن الدالة الحرف " تا " مثلا الذي يقابل

F)x(ولربط الدالة بالحجة نستخدم الصيغة تا(س) التي تقابل (في الفرنسية [11]. ويشير فريجه إلى أن مفهوم الدالة قد تم مده إلى كثير من مجالات العلوم التجريبية.

المساوتان التاليتان : ع = س (س - 4) ، ع = س^2 - 4س .

هما دالتان مختلفتان وإن كانتا متساويتين في قيمتهما أو في مجال قيمهما، أي أن منحناهما البياني سيكون واحدا مهما كانت القيم التي تأخذها الحجة (س) [12].

وقد أدى تطور العلم إلى اتساع مفهوم الدالة فصارت تأخذ صور عديدة، مساواة ....الخ> طرف لطرف أو في العلاقات الحسابية من جمع وطرح وقسمة أو علاقة وتستعمل في الدالة كل أنواع العمليات الجبرية وتستخدم الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة والأس في الدوال الأسيّة، والجيب وجيب التمام في الدوال الجيبية.

وظهر مع مفهوم الدالة عند" فريجه" مفهوم جديد هو "قيمة صدق الدالة". الذي يكون "الصدق" عندما تكون قيم الحجة تحقق صدق العلاقة و"الخطأ" عندما لا تحقق القيم التي تأخذها الحجة صدق العلاقة.

ولنأخذ الدالة التالية:(س^2 =1) إذا أخذ س القيم التالية -1، 0 ، 1، 2

نحصل على القيم التالية (- 1)^2 = 1 (0)^2 = 1، (1)^2 = 1 ،

(2)^2 = 1، (3)^2 = 1، (4)^2 = 1 .

فنجد أن العلاقة صحيحة عندما يأخذ "س" قيم معينة وخاطئة عندما يأخذ "س" القيم الأخرى

.

نقول في الحالة الأولى أن قيمة صدق الدالة هي الصدق، وفي الحالة الثانية أن قيمة صدق الدالة هي الخطأ [13]. وتعني المساواة في المنطق بين عبارتين تعني المساواة في قيمة الصدق. بحيث يمكن في عملية البرهنة المنطقية إذا اقتضت الحاجة استبدال عبارة بما يساويها في قيمة الصدق لتحريك عملية البرهنة نكتب مثلا: ل]، ↔ل~~ [↔] ق [←ق) ←[(ق في التعبير الرياضي العبارة ع = ... هي عبارة غير مشبعة تحتاج إلى حجة تكملها.

وفي العبارة ع = 2س، نحتاج لتعيين قيمة "ع" تعيين قيمة "س" التي هي الحجة في هذه العبارة .

انتبه ـ فريجه ـ إلى أن كل التحليل السابق والذي يتعلق بالمعادلات و اللامعدلات يمكن سحبه على المجال اللغوي، هذه النقلة النوعية للموضوع استوحاها ـ فريجه ـ من خلال المقاربة التالية، وهي أن المعادلة عبارة موجبة تقرر أو تطرح تصور أو فكرة، ولها قيمة صدق . قيمة الصدق هذه يمكن فهمها على أنها الشيء الذي تعيينه العبارة.

La dénotation deL'expression

مثلما أن 4 هي ما تعيينه العبارة الحسابية (2 + 2)، فكذلك العبارة اللغوية يمكن تحليلها بنفس الصورة التي تحلل بها العبارات الجبرية (الدالة بالتحديد). بحيث يمكن أن نجد فيها " قسم منغلق على نفسه" (على حد تعبير فريجه) أي يمكن فهمه دون الحاجة إلى شيء يكمله ليكون مفهوما،وقسم من العبارة يحتاج إلى شيء يكمله ليكون له دلالة يمكن فهمها، أي غير " مشبع "Unsaturated.

في الحساب مثلا " 2 " يمكن فهمها على أنها عدد أولي وعدد زوجي ونصف الأربعة، و، و، و ....الخ ؟ " فهي عبارة تحتاج لما يكملها لتكون مفهومة وذات دلالة .>أما " 2

الشيء ذاته يمكن ملاحظته في العبارة اللغوية { قيصر فتح بلاد الغال } التي يمكن تقسيمها إلى " قيصر "و" فتح بلاد الغال".

فكلمة " قيصر " لها دلالة وهي الشخص الذي تشير إليه هذه الكلمة أما العبارة "فتح بلاد الغال " فهي تحتاج إلى ما يكملها فمن فتح بلاد الغال ؟ فكلمة " قيصر" تكون هي الحجة في عبارتنا هذه وتكون " فتح بلاد الغال " هي الدالة التي تحتاج إلى الحجة لتشبعها، أي ليكتمل معنى العبارة.

فمفهوم الدالة إذا والحجة يمكن أن يتجاوز الأعداد والمتغيرات الجبرية إلى جميع الأشياء وحتى من غير البشر. ولنأخذ المثال التالي: "عاصمة الإمبراطورية الألمانية" تمثل العبارة السابقة اسم علم وهي تعيّن شيئا، ويمكن تقسيمها إلى "عاصمة" و"الإمبراطورية الألمانية "فنجد أن "عاصمة"، عاصمة ماذا؟ فهي غير مشبعة بينما العبارة "الإمبراطورية الألمانية " مغلقة على ذاتها ولا تحتاج إلى ما يضاف لها لتكون لها دلالة مفهومة. ويمكن إعادة صياغة العبارة السابقة ككل وفقا لتحليلنا الدالي إلى(عاصمة س)

إذا أعطينا للحجة "س"، "الإمبراطورية الألمانية " كقيمة نحصل على "برلين" كقيمة للدالة (14).

وقد تشكلت نتيجة البحث المستفيض للدالة وإمكانية سحب هذا المفهوم على اللغة الطبيعية تشكلت قناعة عند فريجه أن تقنيات تحليل اللغة الجبرية صالحة أيضا للغة الطبيعية. Formulary ومن ثمة انساق فريجه إلى نسج الاستدلال المنطقي على منوال الاستدلال الرياضي في استخدام المسلمات، والرموز، والقواعد. ووضع نسقه المعروف الذي سبق به نسق برتراند راسل .

1- Tarski(Alfred). Introduction à la logique .Trad. Jacques Tremblay .S .J .Paris .Gauthier .Villars .P.P . 92. 93.94

2 – Quine (W. V .O) MathematicalLogic .
Harvard UniversityPressCombridge Massachusetts London ,England
RevesedEdution.1981 .P . 222

3 – Chauvineau (Jean) . La Logique Moderne .
Presses Universitaires De France .Paris . 1957 .P . 37

4 – Tarski (Alfred) .Ibid. P . 96

5-Tarski (Alfred). Op.Cit . P. P. 95 . 96

6 -Frege (Gottlob) .ÉcritsLogique et philosophiques .Trad . Claude Imert .Éditions .Points .Romain – Rolland .Paris .P . 84

7-Tarski (A) .Op.Cit.p p 98.99

8- Frege (Gottlob) .Ibid. P.84

9-Frege (Gottlob) .Op . Cit .P . 85

10– Frege (Gottlob) .Op . Cit .P . 86
11– Frege (Gottlob) .Op . Cit .P .100
12-Frege (Gottlob) .Op . Cit .P . 86
13– Frege (Gottlob). Op .Cit .P . 88
14 – Frege (Gottlob) .Op . Cit .P.P .89 . 90